

Sorozatok határértéke

VÉGTELEN SOROK

Összeállította: Bölcsföldi Tünde (bolcsfoldi-
matek.webnode.hu)

Végtelen valós számsor:

Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozat tagjaiból képzett $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ végtelen összeget végtelen valós számsornak, röviden sornak nevezzük.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Sor részletösszegei:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Konvergens sor és összege:

Definíció: A $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sort konvergensnek nevezzük, ha részletösszegeiből alkotott $\{s_n\}$ sorozatnak van határértéke.

A sor összegét ezzel a határértékkel definiáljuk.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$$

Mértani sor és összege:

Definíció: Mértani sornak nevezzük azokat a sorokat, amelyeknél az összeg tagjai mértani sorozatot alkotnak.

▶ **Emlékeztetőül:** Mértani sorozatoknak nevezzük azokat a sorozatokat, amelyeknél (a második tagtól kezdve) bármelyik tag és az őt megelőző tag hányadosa állandó. Ezt az állandó hányadost quociensnek nevezzük és q -val jelöljük.

▶ Mértani sorozat általános tagja: $a_n = a_{n-1}q$, amiből $a_n = a_1q^{n-1}$

▶ Mértani sorozat első n tagjának az összege: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

▶ Tehát: $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots$ ($a_1 \neq 0, q \neq 0$)

Tétel: A mértani sornak akkor és csak akkor van összege, ha $|q| < 1$. Az összeg: $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Feladatok:

Végtelen tizedestörtek közöséges tört alakja:

1. Határozzuk meg az alábbi végtelen szakaszos tizedestörtek közöséges tört alakját.
 - a) $1,3\dot{5}$
 - b) $2,\dot{1}7$
 - c) $3,45\dot{2}$

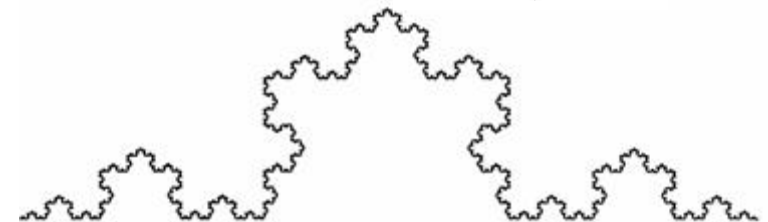
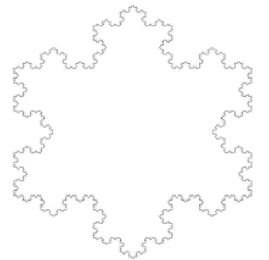
Feladatok:

Geometriai alkalmazások:

2. Tekintsünk egy szabályos háromszöget, majd harmadoljuk minden oldalát. A középső harmadokra írjunk kifelé újabb szabályos háromszögeket. Az előbbi lépést ismételjük meg most már ezen alakzat oldalalaival: harmadoljuk mindet, majd írunk a középső harmadokra kifelé szabályos háromszögeket. Most képzeletben folytassuk ezt a tevékenységet a végtelenségig. Vajon mekkora a kialakuló alakzat kerülete és területe?



A végső formát Koch-féle hópehelynek nevezik. Niels Fabian Helge von Koch svéd matematikus 1904-ben írta le ezt az alakzatot.



Feladatok:

Geometriai alkalmazások:

3. Vegyünk egy szabályos háromszöget, majd távolítsuk el a középvonalai által alkotott háromszög belsejét. Tegyük ezt meg újra a fennmaradó három háromszöggel, majd ezt ismételjük a végtelenségig. Mekkora az eltávolított részek területe? Mekkora az összes berajzolt középvonalak hossza?



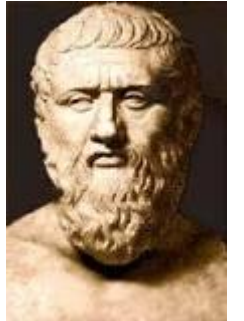
A keletkezett alakzat neve Sierpinski-háromszög. 1915-ben konstruálta Waclaw Franciszek Sierpinski lengyel matematikus.



Feladatok:

Filozófiai problémák:

4. Az eleai Zenon (Kr. e. 490 – Kr. e. 430) azt állította, hogy a mitológiából ismert gyors lábú Akhilleusz sohasem éri utol az egy stádium előnyt kapott teknősbékát, hiába fut 10-szer gyorsabban nála. Szerinte, amíg Akhilleusz egy stádiumot tesz meg, addig a teknős $1/10$ -et, amíg Akhilleusz ezt az $1/10$ stádiumot megteszi, addig a teknős $1/100$ -ot halad, és így tovább. Mindig marad közöttük egy kis távolság a teknős javára, legalábbis Zenon szerint. Igaza van-e Zenonnak? (Válaszunkat számítással támasszuk alá.)



Feladatok:

Példa nem konvergens sorra:

5. A $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ sornak nincs összege.

Indoklás: Képezzük a részletösszeg sorozatok egy részsorozatát:

$$S_{1*} = S_{2^0} = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_{2*} = S_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_{3*} = S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 4 \cdot \frac{1}{2}; \quad \dots$$

$$S_{k*} = S_{2^k} \geq (k+2) \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \infty.$$

A részletösszeg sorozatoknak nincs határértéke, így a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ sornak nincs összege.

Házi feladatok:

1. Határozzuk meg az alábbi végtelen szakaszos tizedestörtek közösleges tört alakját.
 - a) $0,72\dot{9}$
 - b) $6,81\dot{4}$
2. Tekintsünk egy AB szakaszt, amelynek a hossza 2 egység. A szakasz egyik oldalára mint átmérőre félkört rajzolunk; a B pontból folytatva a szakasz másik oldalára az $\frac{1}{2}$ sugarú félkört emeljük; ezután ismét a szakasz innenső felére rajzolunk folytatólagosan $\frac{1}{4}$ sugarú félkört, és így tovább az eljárást folytatjuk a végtelenségig. Mekkora lesz az így kapott félkörívекből álló vonal hossza?

Versenyfeladatok:

1. Melyek azok a 10-es számrendszerbeli háromjegyű pozitív egész számok, amelyeknek számjegyi közül valamelyik 3-as, továbbá a számjegyek összege és szorzata egyenlő?
2. Három egymást követő egész szám harmadik hatványának az összege milyen feltétel teljesülése esetén osztható 18-cal? Bizonyítsuk be, hogy a keresett feltétel esetén a fenti összeg 36-tal is osztható!
3. Legyenek az a, b, c, d számok egymástól és 0-tól különböző számjegyek. Adja meg a lehető legkevesebb számú osztóval rendelkező, tízes számrendszerbeli, $N = \overline{abcd} + \overline{dabc} + \overline{cdab} + \overline{bcda}$ alakú számok közül a legnagyobb!